

# Esquema de calificación

**Noviembre de 2022**

**Matemáticas: Análisis y Enfoques**

**Nivel Medio**

**Prueba 1**

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Instrucciones para los examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.
- FT** Arrastre de error (del inglés *Follow Through*). La práctica de conceder puntos, a pesar de que el alumno haya cometido errores en apartados anteriores, por **sus** métodos/respuestas correctos a partir de resultados incorrectos.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones como se indica en el esquema de calificación p. ej., **M1**, **A2**.

#### 2 Puntuación por método y por respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; se **debe** comprobar todo el procedimiento (el desarrollo del ejercicio) y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustituir en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos, se ha de conceder **A0A1A1**. Si las puntuaciones **A1** aparecen en líneas separadas, se asume que dependen una de la otra y, por lo tanto, es poco probable que se otorgue **A0A1**. Sin embargo, cuando dichas puntuaciones sean independientes (por ej., el esquema de calificación las presenta en secuencia, pero en la solución, una no conduce directamente a la otra) esto se ha de comunicar a través de una nota y, por lo tanto, puede otorgarse **A0A1** (por ejemplo).
- Allí donde el esquema de calificación especifique **A3**, **M2**, etc., **no** subdivida las puntuaciones a menos que haya una nota al respecto.
- En la respuesta a una pregunta del tipo “mostrar que” no es necesario volver a escribir la línea **AG**, a no ser que una **Nota** lo indique de manera explícita en el esquema de calificación.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional, incluso si es incorrecto o sugiere que el alumno no ha comprendido bien la pregunta. Esto fomenta un enfoque uniforme para la corrección, menos dependiente del criterio del examinador. Aunque algunos alumnos puedan verse beneficiados en ese elemento concreto de la pregunta, es probable que estos alumnos también pierdan puntos en otros lugares.

- Una excepción a la regla anterior ocurre cuando una respuesta incorrecta del desarrollo adicional se utiliza **en un apartado posterior**. Por ejemplo, cuando un valor exacto correcto viene seguido de una aproximación decimal incorrecta en el primer apartado y, a continuación, se utiliza esta aproximación en el segundo apartado. En esta situación, conceda los puntos **FT** que corresponda, pero no conceda el **A1** final en el primer apartado. Ejemplos:

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	¿Alguna cuestión relacionada con la puntuación FT?	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	No. Último apartado de la pregunta.	Conceda <b>A1</b> en la puntuación final (no penalice el desarrollo adicional incorrecto).
2.	$\frac{35}{72}$	0,468111... (valor decimal incorrecto)	Sí. El valor se utiliza en apartados posteriores.	Conceda <b>A0</b> en la puntuación final (y pueden otorgarse todos los puntos <b>FT</b> en los apartados posteriores).

### 3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (**M1**). Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro desarrollo/respuesta posterior.

### 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando una respuesta incorrecta dada en un **apartado** de una pregunta se utiliza correctamente en los apartados **posteriores** (p. ej., un valor incorrecto del apartado (a) se utiliza en el apartado (d), o un valor incorrecto del subapartado (c)(i) se utiliza en el subapartado (c)(ii)). Por lo general, para poder conceder puntos **FT**, el alumno **tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior). Sin embargo, si todos los puntos que tiene asignados un apartado posterior corresponden a la respuesta o son implícitos, entonces se deben conceder puntos **FT** por *su* respuesta correcta incluso si no ha incluido el desarrollo.

**Por ejemplo:** tras una respuesta incorrecta al apartado (a) que se utiliza en apartados posteriores, cuando el esquema de calificación indique (**M1**)**A1** en el apartado posterior, es posible conceder la puntuación máxima por *su* respuesta correcta **sin que haya incluido ningún desarrollo**. Para preguntas más largas donde todas las puntuaciones son implícitas salvo los puntos de respuesta, esta regla es aplicable pero puede invalidarse mediante una **Nota** en el esquema de calificación.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** en otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si procede.
- Si la pregunta resulta mucho más sencilla debido a un error, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**, reflexionando sobre a qué corresponde cada puntuación y cómo se traslada eso a la versión simplificada.
- Si el error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra “su(s)” en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén empleando un valor incorrecto.
- Si la respuesta del alumno a la pregunta inicial contradice claramente la información proporcionada en el enunciado de la pregunta, no es apropiado conceder ningún punto **FT** en los apartados posteriores. Esto incluye cuando los alumnos no logran completar correctamente una pregunta del tipo “mostrar que” y, en los siguientes apartados, utilizan su respuesta incorrecta en vez del valor proporcionado en el enunciado.
- Las excepciones a estas reglas de **FT** se indicarán de manera explícita en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero obtiene las respuestas correctas en los apartados posteriores, conceda puntos según corresponda, a no ser que el término de instrucción fuera “A partir de lo anterior”.

## 5 Errores de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los valores o datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (**MR**, del inglés *MisRead*). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se ha producido un error de lectura y no conceda el primer punto, aunque se trate de un punto **M**, pero conceda todos los demás según corresponda.

- Si la pregunta resulta mucho más sencilla debido al error de lectura (**MR**), utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si el **MR** conduce a un resultado inadecuado (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.
- Si el alumno comete un error al copiar su propio trabajo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- Si el alumno utiliza una respuesta correcta a una pregunta del tipo “mostrar que” con un grado de precisión mayor del que se proporciona en el enunciado, eso **NO** es un error de lectura y se puede obtener la puntuación máxima en el apartado posterior.
- Los errores de lectura (**MR**) solo se pueden aplicar cuando el alumno haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el procedimiento y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deben inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de los que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación. Si el término de instrucción es “A partir de lo anterior” y no “A partir de lo anterior o de cualquier otro modo”, entonces no se permiten métodos alternativos a no ser que se indique mediante una nota en el esquema de calificación.

- Cuando se incluyen varios métodos alternativos para toda una pregunta, aparecen señalados mediante los encabezamientos **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**, por ejemplo 1.9 y 1,9; o 1000, 1,000 y 1.000.
- No acepte respuestas finales escritas con notación de calculadora. Sin embargo, se pueden obtener puntos **M** y puntos **A** intermedios en los que la información se haya presentado utilizando notación de calculadora, siempre que la evidencia refleje claramente el requisito para conceder la puntuación.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, algunas respuestas **equivalentes** suelen aparecer escritas entre paréntesis. En el esquema de calificación no se presentan todas las notaciones/respuestas/métodos equivalentes, y se pide a los examinadores que apliquen su criterio de forma apropiada para evaluar si el trabajo del alumno es equivalente.

## 8 Formato y precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Si el grado de precisión no se indica en la pregunta, deben aplicarse las siguientes reglas: *todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas*.

Cuando se utilicen los valores en apartados posteriores, el esquema de calificación generalmente empleará el valor exacto, si bien los alumnos también pueden usar la respuesta correcta con 3 cifras significativas en los apartados posteriores. El esquema de calificación con frecuencia indicará los valores posteriores que resulten “*de utilizar valores con 3 cifras significativas*”.

**Simplificación de las respuestas finales:** Se aconseja a los alumnos que den las respuestas finales utilizando una forma matemática adecuada. En general, para conceder una puntuación **A**, se debe completar la aritmética y simplificar cualquier valor que conduzca a un número entero; por

ejemplo,  $\sqrt{\frac{25}{4}}$  debe escribirse como  $\frac{5}{2}$ . Una excepción a lo anterior es la simplificación de

fracciones, donde no se requiere la forma más sencilla (si bien el numerador y el denominador deben ser números enteros); por ejemplo,  $\frac{10}{4}$  se puede dejar así o escribirla como  $\frac{5}{2}$ . Sin

embargo,  $\frac{10}{5}$  se debe escribir como 2, dado que se simplifica para dar un número entero.

Las expresiones algebraicas se deben simplificar realizando cualquier operación como la adición y la multiplicación; p. ej.,  $4e^{2x} \times e^{3x}$  se debe simplificar a  $4e^{5x}$ , y  $4e^{2x} \times e^{3x} - e^{4x} \times e^x$  se debe simplificar a  $3e^{5x}$ . A no ser que se especifique en la pregunta, no es necesario factorizar las expresiones ni tampoco desarrollar las expresiones factorizadas, de modo que  $x(x+1)$  y  $x^2 + x$  son ambas aceptables.

**Tenga presente:** para obtener los puntos **A** intermedios NO es necesario simplificar las respuestas.

## 9 Calculadoras

No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante esta prueba se considera conducta impropia y, como consecuencia de ello, no se le concederá al alumno ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno ha utilizado algún tipo de calculadora, siga los procedimientos establecidos para abordar la conducta impropia.

## 10. Presentación del trabajo del alumno

**Procedimiento tachado:** Si el alumno (en las hojas que contienen sus respuestas) ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento, o ha tachado de algún otro modo parte del procedimiento, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento, a no ser que haya una nota del alumno que indique explícitamente que quiere que se corrija esa parte del procedimiento.

**Más de una solución:** Cuando un alumno ofrezca dos o más respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solo debe puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario. Si la presentación de las respuestas hace que resulte difícil juzgar cuál es “la primera”, los examinadores deben aplicar su criterio de manera apropiada para determinarlo.

**Trabajo del alumno (solo P1 y P2 de Análisis y Enfoques):** Los alumnos tienen instrucciones de escribir sus respuestas a las preguntas de la Sección A en el cuestionario de examen (CE), y las de la Sección B en los cuadernillos de respuestas. En ocasiones los alumnos necesitan más espacio para la Sección A y utilizan el cuadernillo de respuestas o escriben fuera de las casillas. Ese trabajo hay que calificarlo.

Los alumnos tienen instrucciones de **no** escribir en la Sección B del CE. Es posible que hayan utilizado ese espacio como hoja de borrador, para hacer cálculos que dan por hecho que se van a ignorar. Si han escrito soluciones en el cuadernillo de respuestas, no hay necesidad de mirar la Sección B del CE. Sin embargo, si hay contestaciones a preguntas enteras (o apartados enteros) que no aparecen en el cuadernillo de respuestas, compruebe si están en el CE y puntúelas en caso de que sea así. Si hay una contestación en el cuadernillo de respuestas y otra en el CE, la contestación del cuadernillo debe considerarse la “primera” (véase más arriba).

**Sección A**

1. (a) La pendiente de  $g$  es  $-2$  (puede verse en el función, no acepte  $-2x + 3$ ) **(A1)**

$$g(x) = -2x \quad \text{A1}$$

**[2 puntos]**

- (b) La pendiente es  $\frac{1}{2}$  (puede verse en el función) **(A1)**

Por tratar de sustituir **su** pendiente y  $(-1, 2)$  en la ecuación de la recta (en alguna de sus formas) **(M1)**

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{O BIEN} \quad 2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + c$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(x + 1) + 2 \left( = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \quad \text{A1}$$

**[3 puntos]**

- (c)  $(g \circ h)(x) = -2 \left( \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right)$  O BIEN  $h(0) = \frac{5}{2}$  O BIEN  $g \left( \frac{5}{2} \right)$  **(A1)**

$$(g \circ h)(0) = -5 \quad \text{A1}$$

**[2 puntos]**

**Total [7 puntos]**

2.  $g'(x) = 2xe^{x^2+1}$  (A2)

Por sustituir  $x = -1$  en su derivada (M1)

$g'(-1) = -2e^2$  A1

**Nota:** Conceda **A0M0A0** en el caso donde la derivada incorrecta del candidato es  $g'(x) = e^{x^2+1}$ .

[4 puntos]

3.

(a) (i) Por tratar de hallar el punto medio de A y B **(M1)**

El centro es  $(-1, 3, -2)$  (acepte notación de vector y/o paréntesis faltantes) **A1**

(ii) Por tratar de hallar AB o la mitad de AB o la distancia que hay entre el centro y A (o B) **(M1)**

$$\frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}}{2} \text{ O BIEN } \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= 3 \span style="float: right;">**A1**$$

**[4 puntos]**

(b) Por tratar de hallar la distancia que hay entre su centro y V (altura perpendicular del cono) **(M1)**

$$\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2} \text{ O BIEN } \sqrt{(\text{su generatriz})^2 - (\text{su radio})^2}$$

$$= \sqrt{20} (= 2\sqrt{5}) \span style="float: right;">**(A1)**$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi 3^2 \sqrt{20}$$

$$= 3\pi\sqrt{20} (= 6\pi\sqrt{5}) \span style="float: right;">**A1**$$

**[3 puntos]**

**Total [7 puntos]**

4. (a)

**Nota:** Conceda un máximo de **M1A0A0** si un candidato manipula ambos lados de la ecuación (como mover términos de un lado al otro).

**MÉTODO 1 (desarrollo desde el miembro de la izquierda)**

Por tratar de desarrollar  $(a^2 - 1)^2$  (no acepte  $a^4 + 1$  o  $a^4 - 1$ ) **(M1)**

Miembro de la izquierda =  $a^2 + \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4}$  o  $\frac{4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1}{4}$  **A1**

=  $\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4}$  **A1**

=  $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$  (= miembro de la derecha) **AG**

**Nota:** no conceda el **A1** final si el trabajo adicional contradice el **AG**.

**MÉTODO 2 (desarrollo desde el miembro de la derecha)**

Por tratar de desarrollar  $(a^2 + 1)^2$  **(M1)**

Miembro de la derecha =  $\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4}$

=  $\frac{4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1}{4}$  **A1**

=  $a^2 + \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4}$  **A1**

=  $a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$  (= miembro de la izquierda) **AG**

**Nota:** no conceda el **A1** final si el trabajo adicional contradice el **AG**.

**[3 puntos]**

Continúa en la pág. siguiente...

*Continuación de la Pregunta 4*

- (b) Por darse cuenta de que la base y la altura son  $a$  y  $\left(\frac{a^2-1}{2}\right)$

(Puede verse en un diagrama)

**(M1)**

$$\text{Área} = \frac{a}{2} \left( \frac{a^2-1}{2} \right) \text{ (o equivalente) } \left( = \frac{a(a^2-1)}{4} = \frac{a^3-a}{4} \right)$$

**A1**

**[2 puntos]**

**Total [5 puntos]**

5. Reconoce necesidad de integrar (M1)

$$\int \frac{6x}{x^2+1} dx \quad \text{O BIEN} \quad u = x^2 + 1 \quad \text{O BIEN} \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\int \frac{3}{u} du \quad \text{O BIEN} \quad 3 \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad \text{(A1)}$$

$$= 3 \ln(x^2+1) (+c) \quad \text{O BIEN} \quad 3 \ln u (+c) \quad \text{A1}$$

Por sustitución correcta de  $x=1$  y  $f(x)=5$  o bien  $x=1$  y  $u=2$  en la ecuación usando **su** expresión integrada (debe involucrar  $c$ ) (M1)

$$5 = 3 \ln 2 + c$$

$$f(x) = 3 \ln(x^2+1) + 5 - 3 \ln 2 \quad \left( = 3 \ln(x^2+1) + 5 - \ln 8 = 3 \ln \left( \frac{x^2+1}{2} \right) + 5 \right)$$

(o equivalente) A1

**Nota:** Acepte la presencia del símbolo de módulo en el desarrollo del ejercicio y en la respuesta final.

**[5 puntos]**

6. (a)  $P(A \cap B) = 0,24$  A1

**[1 punto]**

(b)  $P(A \cup B) = 1,1 - P(A \cap B)$  (A1)

$(0 \leq) P(A \cup B) \leq 1$  (M1)

**Nota:** Esta información se puede haber transmitido mediante un diagrama claramente rotulado o una explicación escrita indicando que  $P(A \cup B) = 1$

El valor mínimo de  $P(A \cap B)$  es 0,1 A1

**[3 puntos]**

(c) A es un subconjunto de B (entonces  $P(A \cap B) = P(A)$ ) R1

**Nota:** Esta información se puede haber transmitido mediante un diagrama claramente rotulado en el que  $A$  esté totalmente incluido en  $B$ , o en una explicación escrita indicando que  $P(A \cap B) = P(A)$ .

El valor máximo de  $P(A \cap B)$  es 0,3. A1

**Nota:** No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]**

**Total [6 puntos]**

**Sección B**

7. (a) Por sustituir correctamente  $h=3$  y  $k=2$  en  $f(x)$  **(A1)**

$$f(x) = a(x-3)^2 + 2$$

- Por la sustitución correcta de  $(5,0)$  **(A1)**

$$0 = a(5-3)^2 + 2 \quad \left( a = -\frac{1}{2} \right)$$

**Nota:** Los dos primeros puntos A son independientes el uno del otro.

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

**A1****[3 puntos]**

*Continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 7

(b) (i) **MÉTODO 1**

Por la sustitución correcta de (1, 4) **(A1)**

$$p + (t - 1) - p = 4$$

$t = 5$  **A1**

Sustituir su valor de  $t$  en  $9p - 3(t - 1) - p = 4$  **(M1)**

$$8p - 12 = 4$$

$p = 2$  **A1**

**MÉTODO 2**

Por la sustitución correcta de UNA de las coordenadas  $(-3, 4)$  o  $(1, 4)$ . **(A1)**

$$9p - 3(t - 1) - p = 4 \quad \text{O BIEN} \quad p + (t - 1) - p = 4$$

Por intento válido de resolver sus dos ecuaciones **(M1)**

$p = 2, t = 5$  **A1A1**

$$(g(x) = 2x^2 + 4x - 2)$$

Continúa en la pág. siguiente...

*Continuación de la Pregunta 7*

(ii) Por tratar de hallar la coordenada  $x$  del vértice **(M1)**

$$x = \frac{-3+1}{2} (= -1) \quad \text{O BIEN} \quad \frac{-4}{2 \times 2} \quad \text{O BIEN} \quad 4x+4=0 \quad \text{O BIEN} \quad 2(x+1)^2 - 4$$

La coordenada  $y$  del vértice =  $-4$  **(A1)**

el recorrido correcto **A1**

$$[-4, +\infty[ \quad \text{O BIEN} \quad y \geq -4 \quad \text{O BIEN} \quad g \geq -4 \quad \text{O BIEN} \quad [-4, \infty)$$

**[7 puntos]**

*Continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 7

(c) Por igualar las dos funciones o ecuaciones **(M1)**

$$g(x) = j(x) \text{ O BIEN } px^2 + (t-1)x - p = -x + 3p$$

$$px^2 + tx - 4p = 0 \span style="float: right;">**(A1)**$$

Por tratar de hallar el discriminante (no acepte solo en la fórmula cuadrática) **(M1)**

$$\Delta = t^2 + 16p^2 \span style="float: right;">**A1**$$

$\Delta = t^2 + 16p^2 > 0$  , porque  $t^2 \geq 0$  y  $p^2 > 0$  , por lo tanto la suma será positiva **R1R1**

**Nota:** Conceda **R1** por darse cuenta de que  $\Delta$  es positivo y otro **R1** por decir el motivo.

los gráficos de  $g$  y  $j$  tienen dos puntos de intersección distintos **AG**

**[6 puntos]**

**Total [16 puntos]**

8. (a) (i) Por utilizar un enfoque válido para hallar el logaritmo del enunciado **(M1)**

$$2^x = \frac{1}{16} \text{ O BIEN } 2^x = 2^{-4} \text{ O BIEN } \frac{1}{16} = 2^{-4} \text{ O BIEN } \log_2 1 - \log_2 16$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = -4 \quad \mathbf{A1}$$

- (ii) Por utilizar un enfoque válido para hallar el logaritmo del enunciado **(M1)**

$$9^x = 3 \text{ O BIEN } 3^{2x} = 3 \text{ O BIEN } 3 = 9^{\frac{1}{2}} \text{ O BIEN } \frac{\log_3 3}{\log_3 9}$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2} \quad \mathbf{A1}$$

- (iii)  $(\sqrt{3})^x = 81 \text{ O BIEN } \frac{\log_3 81}{\log_3 \sqrt{3}}$  **(A1)**

$$(3)^{\frac{x}{2}} = 3^4 \text{ O BIEN } \frac{x}{2} = 4 \text{ O BIEN } \frac{4}{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{(A1)}$$

$$x = 8 \quad \mathbf{A1}$$

**[7 puntos]**

*Continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 8

(b) (i)

**Nota:** Hay muchos enfoques válidos para la pregunta, y los pasos pueden verse de diferentes maneras. Aquí se dan algunos métodos posibles, pero los candidatos pueden usar una combinación de uno o más de estos métodos.

En todos los métodos, la marca **A** final se otorga por un trabajo que conduce directamente a la **AG**.

**MÉTODO 1**

$$(ab)^3 = a \quad \text{(A1)}$$

Por tratar de despejar  $b$  o una potencia de  $b$ . (M1)

Desarrollo correcto (A1)

$$b = \frac{a}{a^3 b^2} \quad \text{O BIEN} \quad b^3 = a^{-2} \quad \text{O BIEN} \quad b^{-1} = (ab)^2 \quad \text{O BIEN} \quad b^3 = \frac{1}{a^2}$$

$$b = \frac{1}{a^2 b^2} \quad \text{O BIEN} \quad b = (ab)^{-2} \quad \text{O BIEN} \quad 3 \log_{ab} b = -2 \log_{ab} a \quad \text{O BIEN}$$

$$-\log_{ab} b = 2 \log_{ab} ab \quad \text{A1}$$

$$\log_{ab} b = -2 \quad \text{AG}$$

Continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 8

**MÉTODO 2**

$$(ab)^3 = a \quad \text{(A1)}$$

Por aplicar el logaritmo en base  $ab$  a ambos miembros de la igualdad **(M1)**

$$\log_{ab} (ab)^3 = \log_{ab} a \quad \text{O BIEN} \quad \log_{ab} a^3 b^3 = \log_{ab} a$$

Por aplicar correctamente propiedades de los logaritmos que conducen a la ecuación en términos de  $\log_{ab}$  **(A1)**

$$3\log_{ab} a + 3\log_{ab} b = \log_{ab} a \quad \text{O BIEN} \quad 3\log_{ab} b = -2\log_{ab} a \quad \text{O BIEN}$$

$$\log_{ab} b^3 = \log_{ab} a^{-2}$$

$$\log_{ab} b = \log_{ab} a^{-\frac{2}{3}} \quad \text{O BIEN} \quad \log_{ab} b = -\frac{2}{3}\log_{ab} a \quad \text{O BIEN} \quad \log_{ab} b = -\frac{2}{3}(3) \quad \text{A1}$$

$$\log_{ab} b = -2 \quad \text{AG}$$

**Nota:** Los candidatos pueden sustituir  $\log_{ab} a = 3$  en cualquier momento de su desarrollo

Continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 8

**MÉTODO 3**

$$\log_{ab} a = 3$$

Por escribir en términos de base  $a$  **(M1)**

$$\frac{\log_a a}{\log_a ab} (= 3)$$

Por aplicar correctamente propiedades de los logaritmos. **(A1)**

$$\frac{\log_a a}{\log_a a + \log_a b} (= 3) \quad \text{O BIEN} \quad \frac{1}{1 + \log_a b} (= 3) \quad \text{O BIEN} \quad 3 \log_a b = -2 \quad \text{O}$$

$$\text{BIEN} \quad \log_a b = -\frac{2}{3}$$

Por escribir  $\log_{ab} b$  en términos de base  $a$  **(A1)**

$$\log_{ab} b = \frac{\log_a b}{\log_a a + \log_a b}$$

Desarrollo correcto **A1**

$$\log_{ab} b = \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \quad \text{O BIEN} \quad \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$\log_{ab} b = -2$  **AG**

**MÉTODO 4**

$\log_{ab} ab = 1$  **A2**

$\log_{ab} a + \log_{ab} b = 1$  **(A1)**

$3 + \log_{ab} b = 1$  **A1**

$\log_{ab} b = -2$  **AG**

Continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 8

- (ii) Por aplicar correctamente propiedades del logaritmo de un producto o logaritmo de un cociente

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \log_{ab} \sqrt[3]{a} - \log_{ab} \sqrt{b} \quad \text{O BIEN} \quad \log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \log_{ab} \sqrt[3]{a} + \log_{ab} \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (\mathbf{A1})$$

Desarrollo correcto (\mathbf{A1})

$$= \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b \quad \text{OR} \quad \log_{ab} ab - \log_{ab} \sqrt{b}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2}(-2) \quad (\mathbf{A1})$$

$$= 2 \quad \mathbf{A1}$$

**Nota:** Conceda **A1A0A0A1** por una respuesta correcta sin desarrollo.

**[8 puntos]**

**Total [15 puntos]**

9. (a)  $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$

Por un intento válido de reducir la ecuación a una que involucre a solo una función trigonométrica

(M1)

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}$  O BIEN  $1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x = 0$  O BIEN  $\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$

O BIEN  $\cos 2x - 1 + \cos 2x = 0$

Ecuación correcta

(A1)

$\tan^2 x = \frac{1}{3}$  O BIEN  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$  O BIEN  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$  O BIEN  $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  O BIEN  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  O BIEN  $\sin x = (\pm) \frac{1}{2}$  O BIEN

$2x = \frac{\pi}{3} \left( \frac{5\pi}{3} \right)$

(A1)

$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

A1A1

**Nota:** Conceda **M1A1A0A1A0** a los candidatos que omitan el +/- (para tan o cos) y solo contesta  $x = \frac{\pi}{6}$ .

Conceda **M1A1A0A0A0** a los candidatos que omitan el +/- (para tan o cos) y solo contesta  $x = 30^\circ$ .

Conceda **M1A1A1A1A0** a los candidatos que responden con ambas respuestas en grados.

Conceda **M1A1A1A1A0** a los candidatos que responden con ambas respuestas correctas en radianes, pero que incluyan soluciones adicionales fuera de dominio.

Conceda un máximo de **M1A0A0A1A1** por respuestas correctas sin desarrollo.

[5 puntos]

Continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 9

- (b) (i) Por tratar de utilizar la regla de la cadena (y su aplicación queda evidenciada al verse al menos un término en  $\cos x \sin x$ ) **(M1)**

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x - 6 \sin x \cos x (= -8 \sin x \cos x = -4 \sin 2x) \quad \mathbf{A1}$$

- (ii) Por intento válido de resolver su  $f'(x) = 0$  **(M1)**

Por lo menos dos coordenadas de  $x$  correctas (pueden ser vistas en las coordenadas) **(A1)**

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

**Nota:** Acepte soluciones correctas adicionales fuera del dominio.

Conceda **A0** si se dan soluciones incorrectas adicionales.

coordenadas correctas (pueden ser vistas en el gráfico de parte (c)) **A1A1A1**

$$(0,1), (\pi,1), \left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$$

**Nota:** Conceda un máximo de **M1A1A1A1A0** si se dan soluciones adicionales.

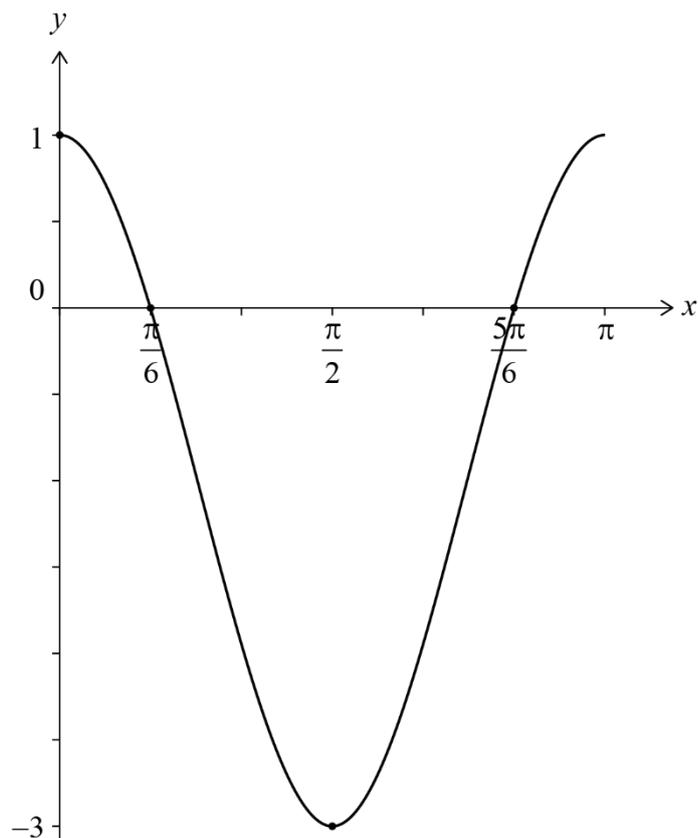
**Nota:** Si los candidatos no hallan al menos dos coordenadas de  $x$  correctas, es posible conceder las calificaciones finales apropiadas para sus coordenadas correctas, como **M1A0A0A1A0**.

**[7 puntos]**

Continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 9

(c)



**Nota:** En esta pregunta, no aplique el 'arrastre de error' a partir de valores incorrectos obtenidos en apartados anteriores.

Por una curva suave aproximadamente correcta con un mínimo en  $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$  **A1**

**Nota:** Si el alumno no logra este punto, entonces no le conceda ningún punto más.

Puntos extremos  $(0,1)$  y  $(\pi,1)$ , intersecciones con el eje  $x$  en  $\frac{\pi}{6}$  y  $\frac{5\pi}{6}$  **A1**

La concavidad correcta se muestra claramente en  $(0,1)$  y  $(\pi,1)$  **A1**

**Nota:** Los dos puntos finales son independientes el uno del otro.

**[3 puntos]**

**Total [15 puntos]**